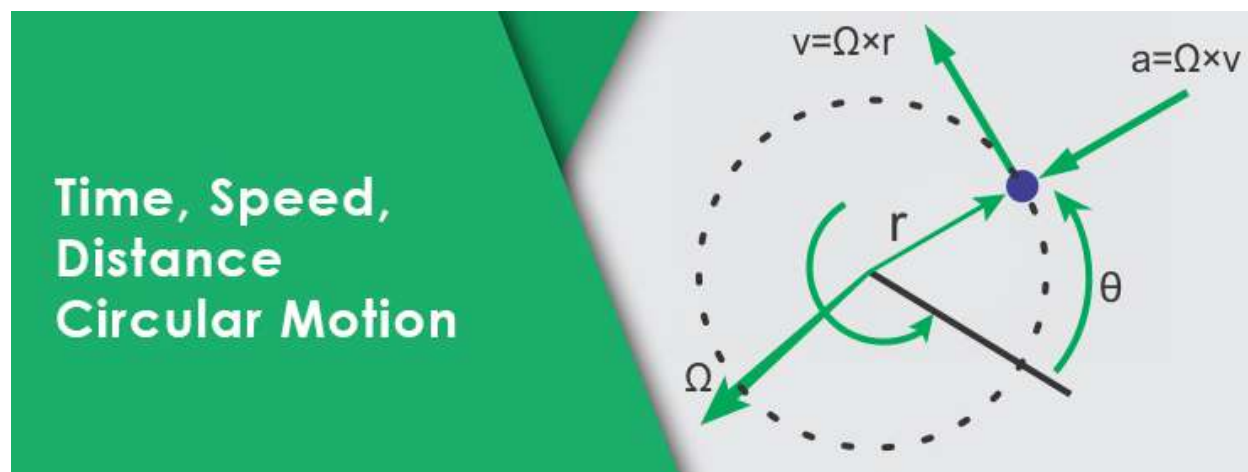


DISTANCE PATTERNS (PART 4 – CIRCULAR TRACK)



Trong Pattern này, người / vật sẽ di chuyển trên 1 đường tròn như ảnh minh họa trên.

1. DẠNG 1: TIME TO MEET AT THE STARTING POINT (Thời gian cần thiết để gặp nhau tại điểm xuất phát)

Lưu ý, đối với dạng bài này, câu hỏi cần chúng ta tính thời gian để 2 người / vật / xe gặp nhau lần đầu tại điểm xuất phát nên bạn cũng nên hiểu rằng 2 người / vật / xe có thể đã gặp nhau đâu đó trên track trước khi gặp nhau tại starting point.

Bước 1: Tính thời gian cần thiết để mỗi người / xe / vật đi được đúng 1 vòng với vận tốc riêng

Bước 2: Lấy LCM (Bội chung nhỏ nhất) của các thời gian vừa tính được ở bước 1. LCM này chính là thời gian cần thiết để 2 người / xe / vật gặp nhau tại điểm xuất phát.

Ex 1: There is a track with a length of 120 meters and 2 people, A & B, are running around it at 12 m/min and 20 m/min respectively in the same direction. When will A and B meet at the starting point for the first time?

Bước 1:

$$t_A = \frac{120}{12} = 10 \text{ mins để chạy hết track}$$

$$t_B = \frac{120}{20} = 6 \text{ mins để chạy hết track}$$

Bước 2:

LCM(10,6) = 30 mins tức cần 30 mins để 2 người gặp nhau lần đầu tại điểm xuất phát chung ban đầu. (Cụ thể lúc đó A đã chạy được $\frac{30}{10} = 3$ vòng và B đã chạy được $\frac{30}{6} = 5$ vòng.

Ex 2: A, B and C run around a circular track starting from the same point simultaneously and in the same direction at speeds of 4 kmph, 6 kmph and 8 kmph respectively. If the length of the track is 400 meters, when will A, B and C meet at the starting point for the first time after they started the race?

- A. 1 minute
- B. 5 minutes
- C. 12 minutes
- D. 20 minutes
- E. 24 minutes

Bước 1:

$$t_A = \frac{0.4}{4} \times 60 = 6 \text{ mins để chạy hết track}$$

$$t_B = \frac{0.4}{6} \times 60 = 4 \text{ mins để chạy hết track}$$

$$t_C = \frac{0.4}{8} \times 60 = 12 \text{ mins để chạy hết track}$$

Bước 2:

$$\text{LCM}(6, 4, 12) = 12 \text{ mins} \rightarrow \text{C}$$

2. DẠNG 2: TIME TO MEET FOR THE FIRST TIME ANYWHERE ON THE TRACK (Thời gian cần thiết để gặp nhau tại 1 điểm bất kì trên track)

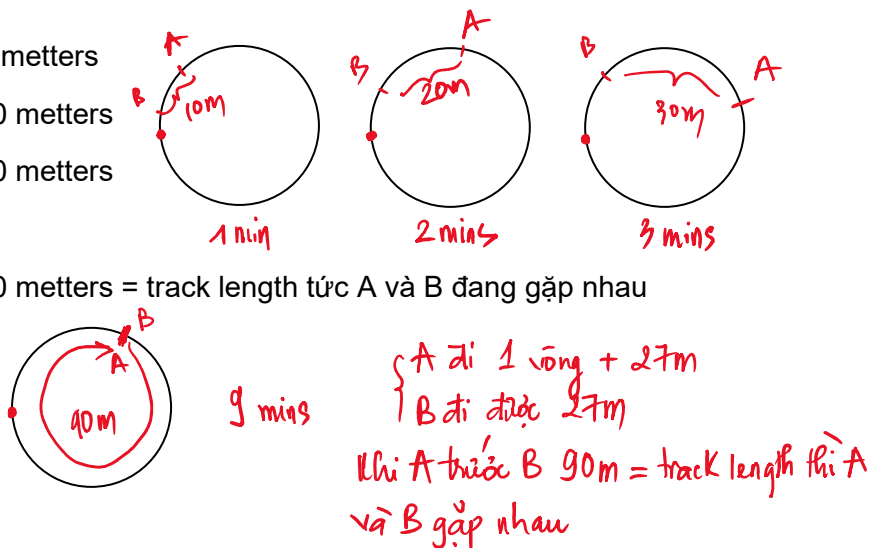
Lần này, khác với dạng 1, ta chỉ cần tính thời gian để 2 người / xe / vật gặp nhau lần đầu tại 1 điểm bất kì trên track sau khi xuất phát.

Bây giờ, giả sử A và B chạy với vận tốc 13 m/min và 3 m/min (xuất phát cùng thời điểm) trên circular track có chiều dài 90m thì:

- . Sau 1 min → A đang dẫn trước B 10 metres
- . Sau 2 mins → A đang dẫn trước B 20 metres
- . Sau 3 mins → A đang dẫn trước B 30 metres

....

- . Sau 9 mins → A đang dẫn trước B 90 metres = track length tức A và B đang gặp nhau



Để 2 người gặp nhau lần đầu sau khi cùng xuất phát thì người chạy nhanh hơn phải chạy trước đúng 1 vòng so với người chạy chậm hơn → Time cần thiết để gặp nhau lần đầu tại điểm bất kì trên track = $\frac{\text{track length}}{\text{relative speed}}$ với relative speed là chênh lệch vận tốc ($v_{\text{faster}} - v_{\text{lower}}$) giữa 2 người / vật / xe.

Ex 3: There is a track with a length of 120 meters and 2 people, A & B, are running around it at 12 m/min and 20 m/min respectively in the same direction. When will B overtake A for the 1st time?

$$t = \frac{120}{20-12} = \frac{120}{8} = 15 \text{ mins}$$

Như vậy, cần **15 mins** để 2 người gặp nhau lần đầu trên track (nhưng không phải tại starting point)

Ex 4: A and B run a race, in the same direction on a circular track of 100 meters. If the race was of 2000 meters and the ratio of speeds of A and B was 5 : 3, find the number of times the two meet?

- A. 4
- B. 5
- C. 6
- D. 7
- E. 8

Circular track = 100m
 Race = 2000m
 $\frac{v_A}{v_B} = \frac{5a}{3a}$

Số lần gặp?

$$t \text{ gặp lần đầu} = \frac{100}{v_A - v_B} = \frac{100}{5a - 3a} = \frac{50}{a}$$

$$t \text{ để A hoàn tất race dài 2000} = \frac{2000}{5a} = \frac{400}{a}$$

Như vậy, cứ sau khoảng thời gian $\frac{50}{a}$ là 2 người gặp nhau và A hoàn tất cuộc đua trong $\frac{400}{a}$ nên tổng số lần gặp nhau là: $\frac{400}{a} : \frac{50}{a} = 8 \text{ lần} \rightarrow E$

Ex 5: Two persons A and B are racing along a circular track. The speed of A is twice the speed of B. The length of the circular track is 800 m and the length of the race is 7200 m. After the start of the race, A meets B for the first time at the end of the third minute. If A and B start the race from the same point, find the time taken by A to finish the race.

- a) 19 minutes
- b) 9.5 minutes
- c) 27 minutes
- d) 13.5 minutes
- e) 12 minutes

$$v_A = 2v_B$$

$$\text{Circular track} = 800 \text{ m}$$

$$\text{Race} = 7200 \text{ m}$$

$$t_{\text{meet 1st}} = 3 \text{ mins}$$

$$t = 3 = \frac{800}{v_A - v_B} = \frac{800}{v_A - \frac{1}{2}v_A} = \frac{1600}{v_A} \rightarrow v_A = \frac{1600}{3}$$

$$\text{Vì đường đua dài 7200 m} \rightarrow \text{Thời gian để A hoàn tất đường đua} = \frac{7200}{\frac{1600}{3}} = \frac{9 \times 3}{2} = 13.5 \text{ mins} \rightarrow D$$

Similar question:

. In a 3600 m race around a circular track of length 400m, the faster runner and the slowest runner meet at the end of the fourth minute, for the first time after the start of the race. All the runners maintain uniform speed throughout the race. If the faster runner runs at thrice the speed of the slowest runner. Find the time taken by the faster runner to finish the race.

- A. 36 minute
- B. 24 minute
- C. 16 minute
- D. 12 minute
- E. 10 minute

. In a 4000 meter race around a circular stadium having a circumference of 1000 meters, the fastest runner and the slowest runner reach the same point at the end of the 5th minute, for the first time after the start of the race. All the runners have the same starting point and each runner maintains a uniform speed throughout the race. If the fastest runner runs at twice the speed of the slowest runner, what is the time taken by the fastest runner to finish the race?

- (A) 20 min
- (B) 15 min
- (C) 10 min
- (D) 5 min
- (E) 3 min

Ex 6: A and B start running on a circular track of length 1200 meters with speeds in the ratio of 1 : 5 and A running clockwise and B anticlockwise. At what distance from the starting point, measured clockwise, would the point of their 4th meeting be?

- A. 200 mts
- B. 400 mts
- C. 600 mts
- D. 800 mts
- E. 1000 mts

$$L = 1200 \text{ m}$$

$$v_A : v_B = 1a : 5a$$

4th meeting point cách starting point (clockwise) = ?

2 người chạy ngược chiều nên ta có dạng meeting with scenario

$$t \text{ gặp nhau} = \frac{1200}{1a+5a} = \frac{200}{a}$$

Lúc này điểm gặp nhau cách starting point (clockwise) = Quãng đường A đi được = $v_A \times t =$

$$a \times \frac{200}{a} = 200$$

Vậy tới lần thứ 4 gặp nhau thì điểm gặp nhau cách starting point (clockwise) = $200 \times 4 = 800 \rightarrow$

D

Ex 7: Donovan and Michael are racing around a circular 400-meter track. If Donovan runs each lap in 45 seconds and Michael runs each lap in 40 seconds, how many laps will Michael have to complete in order to pass Donovan, assuming they start at the same time?

- A. 8
- B. 9
- C. 10
- D. 11
- E. 12

$$v_M > v_D$$

$$v_M = \frac{400}{40}$$

$$v_D = \frac{400}{45}$$

Số laps M cần hoàn tất để gặp D = $\frac{t \text{ gặp nhau}}{t_M \text{ hoàn tất 1 lap}} = ?$

$$t \text{ gặp nhau} = \frac{400}{v_M - v_D} = \frac{400}{\frac{400}{40} - \frac{400}{45}} = \frac{1}{\frac{1}{40} - \frac{1}{45}} = 5 \times 8 \times 9 \text{ seconds}$$

Như vậy, M cần hoàn tất $\frac{5 \times 8 \times 9}{40} = 9 \text{ vòng} \rightarrow B$

3. MỘT SỐ DẠNG KHÁC

Ex 8: Two people P and Q start running towards a circular track of length 400 m in opposite directions with initial speeds of 10 m/s and 40 m/s respectively. After what time from the start will they meet for the 1st time?

Vì 2 người chạy ngược chiều nên ta có Meeting with scenario

$$t = \frac{400}{10+40} = 8 \text{ secs}$$

Ex 9: Two people P and Q start running towards a circular track of length 400 m in opposite directions with initial speeds of 10 m/s and 40 m/s respectively. Whenever they meet, P's speed doubles and Q's speed halves. After what time from the start will they meet for the third time?

Đây là dạng bài chuỗi gặp liên tiếp của Meeting with Scenario

. 1st time (đã tính ở trên là 8s)

. 2nd time:

Sau khi gặp nhau lần đầu $\rightarrow v_P = 20$ và $v_Q = 20$

$$\rightarrow t_2 = \frac{400}{20+20} = 10 \text{ secs}$$

. 3rd time:

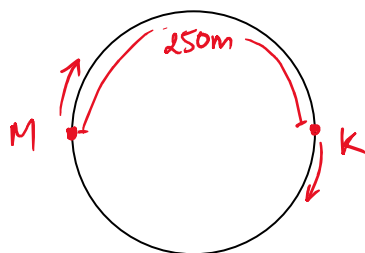
Sau khi gặp nhau lần 2 $\rightarrow v_P = 40$ và $v_Q = 10$

$$\rightarrow t_3 = \frac{400}{40+10} = 8 \text{ secs}$$

Như vậy, tổng thời gian cần thiết là $8 + 10 + 8 = 26 \text{ secs}$

Ex 10: Mary and Kate are running clockwise around a circular track with a circumference of 500 meters, each at her own constant speed. Mary runs 1000 meters every five minutes and Kate runs 1000 meters every six minutes. If Mary and Kate start opposite one another on the circular track, how many minutes must Mary run in order to pass Kate?

- A. 7.5
- B. 22.5
- C. 750
- D. 7.5π
- E. 45π



$$S = 500m$$

$$v_M = \frac{1000}{5}$$

$$v_K = \frac{1000}{6}$$

Bài này trở thành dạng Overtaking scenario với khoảng cách ban đầu là 250m vì 2 người xuất phát cùng thời điểm ở 2 vị trí đối diện nhau trên track và di chuyển cùng hướng (clockwise).

$$t = \frac{250}{\frac{1000}{5} - \frac{1000}{6}} = \frac{1}{\frac{4}{5} - \frac{4}{6}} = 7.5 \text{ mins} \rightarrow A$$

Ex 11: Mary and Kate are running clockwise around a circular track with a circumference of 500 meters, each at her own constant speed. Mary runs 1000 meters every five minutes and Kate runs 1000 meters every six minutes. If Mary and Kate start opposite one another on the circular track, how many minutes must Mary run in order to pass Kate and catch her again?

- A. 7.5
- B. 22.5
- C. 750
- D. 7.5π
- E. 45π

Ở ví dụ trên, ta đã tính được cần 7.5 mins thì Mary sẽ gặp Kate nhưng bây giờ câu hỏi yêu cầu gặp lần 2 nên ta áp dụng **DẠNG 2: TIME TO MEET FOR THE FIRST TIME ANYWHERE ON THE TRACK** (Thời gian cần thiết để gặp nhau tại 1 điểm bất kì trên track)

Để 2 người gặp nhau lần nữa kể từ lần đầu thì Mary là người chạy nhanh hơn phải chạy trước Kate đúng 1 vòng $\rightarrow t = \frac{500}{\frac{1000}{5} - \frac{1000}{6}} = 15 \text{ mins}$

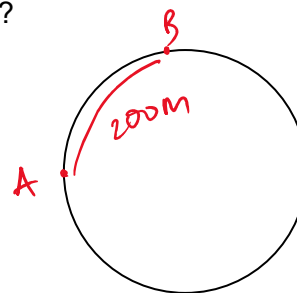
Như vậy ta cần tổng cộng: $7.5 + 15 = 22.5 \text{ mins} \rightarrow B$

Extra notes:

Khi bạn đã hiểu rõ 2 ví dụ này, ta có thể làm nhanh như sau: $t = \frac{250+500}{\frac{1000}{5} - \frac{1000}{6}} = \frac{750}{\frac{100}{3}} = 22.5 \text{ mins} \rightarrow B$

Ex 12: Two racecar drivers, Abernathy and Berdoff, are driving around a circular track. If Abernathy is 200 meters behind Berdoff and both drivers drive at their respective constant rates, how long, in seconds, will it take for Abernathy to catch up to Berdoff?

- (1) The circumference of the racetrack is 1,400 meters.
 (2) Abernathy is driving 25 meters per minute faster than Berdoff.



$$t_{\text{overtake}} = \frac{200}{v_A - v_B} = ?$$

1) Ta chưa biết $v_A - v_B \rightarrow$ Insuff.

2) $v_A - v_B = 25 \rightarrow$ Suff.

$\rightarrow$ B

Ex 13: In a race of 4800 meters run on a circular track of 400 meters length, the ratio of the speed of the two athletes is 3 : 5. If they run in the opposite directions, how many times do they meet in the entire race?

A. 11

B. 13

C. 15

D. 17

E. 19.

Track length = 400 m
 Race = 4800 m
 $v_A : v_B = \frac{3a}{5a}$

Số lần gặp ?

2 người chạy ngược chiều nên ta có dạng Meeting with scenario

$$t \text{ gặp lần đầu} = \frac{400}{v_A + v_B} = \frac{400}{3a + 5a} = \frac{50}{a}$$

$$t \text{ để B (chạy nhanh hơn) hoàn tất race dài 4800} = \frac{4800}{5a} = \frac{960}{a}$$

Như vậy, cứ sau khoảng thời gian $\frac{50}{a}$ là 2 người gặp nhau và B hoàn tất cuộc đua trong $\frac{960}{a}$ nên tổng số lần gặp nhau là: $\frac{960}{a} : \frac{50}{a} \sim 19 \text{ lần} \rightarrow$ E